

6

BIBLIOTECA
DE

Aula

LA MATEMÁTICA APLICADA A LA VIDA COTIDIANA



Fernando CORBALÁN

GAO

1. NUESTRO SISTEMA DE NUMERACIÓN

*¿Lo conocemos, a pesar de utilizarlo constantemente?
¿Por qué han caído casi en desuso los números romanos?
Y, sin embargo, seguimos empenándonos en contar por docenas.
Otras maneras útiles de contar: de dos en dos.
Historia, presente y curiosidades.*

Socialmente se acostumbra a asimilar las matemáticas con los números, de forma que los escolares suelen tener bastante asumido que lo que hay que hacer para resolver un problema es una o varias operaciones numéricas. O que, incluso, si llegan a poder dar una respuesta a una situación sin haber tenido que escribir algunos cuantos números, seguro que su solución no es correcta. No vamos a negar la importancia de los números en las matemáticas. Pero hay que dejar claro que la esencia de las matemáticas está en los razonamientos, no en los números. Y que, además, dentro de ese baremo de belleza que siempre solemos detectar en los resultados matemáticos (y así ha sido siempre a lo largo de la historia), se suele considerar más elegante o más bello un razonamiento en el que no intervengan números (o la menor cantidad posible de ellos).

La escritura de los números en el sistema de numeración decimal (que es nuestra manera de hacerlo y que coincide con la que se usa en todos los países del mundo y en todas las culturas, y que constituye el único lenguaje universal de la humanidad) se toma por algo tan obvio, tan de siempre, que con cierta frecuencia se olvida su historia, su génesis y sus virtudes. De modo que no se reflexiona sobre las ventajas que tiene este sistema respecto a otras maneras de representación (algunas de las cuales coexisten de manera residual con ella) ni tampoco sobre las dificultades de la interiorización del sistema o de su aprendizaje, que se tiende a considerar que son inexistentes o muy reducidas.

En este primer capítulo reflexionaremos sobre todo lo que acabamos de comentar, desde diferentes perspectivas. Y veremos que existen muchos más aspectos, y algunos bastante sutiles, de los que habitualmente tenemos en cuenta. Y lo haremos incluso por medio de algunas situaciones “mágicas” o por otras que pongan en entredicho, que hagan tambalearse, nuestros propios conocimientos so-

bre la materia. Y procuraremos que sean cuestiones que apetezca abordar y que resuelvan preguntas de situaciones próximas a nuestra vida diaria.

Un poco de historia

Hay invenciones que no se consideran como muy importantes (en general por desconocimiento o por no haberse detenido a pensar en ello) y que sin embargo han jugado un papel capital en la historia. Entre ellas se encuentra el sistema de numeración decimal. Como afirma G. Ifrah¹, «en la historia de la humanidad se han producido dos acontecimientos tan revolucionarios como el dominio del fuego, el desarrollo de la agricultura o la eclosión del urbanismo y de la tecnología. Nos referimos a la invención de la escritura y a la del cero y de las llamadas cifras “árabes”, pues, como las otras, estas invenciones han cambiado por completo la existencia de los seres humanos».

Hasta llegar a esa invención, la humanidad recorrió un largo camino que comenzó hace unos 5 000 años, en los territorios de lo que ahora es Irak. Los sumerios y los elemitas, dos pueblos que habitaban la zona, fueron los primeros que empezaron a realizar transcripciones gráficas de las ideas, con lo que comienza lo que ahora llamamos escritura. Y lo hicieron en primer lugar con símbolos para representar cantidades (nuestras actuales cifras) y más tarde también con el lenguaje hablado. Por lo tanto, la invención de las cifras es más antigua que la de la escritura, y su primera utilidad fue la representación de las cantidades. Algunas culturas, muy desarrolladas en otros aspectos, como la inca del Perú anterior a la conquista española, no tuvieron una escritura, pero sí una manera de representar las cantidades, por medio de nudos en cuerdas, los llamados “quipus”. La representación de cantidades de objetos es la primera gran utilidad de un sistema de numeración, para poder recordarlas.

16 Los símbolos que utilizaron para las cifras las distintas culturas fueron diferentes entre sí, pero, al menos para los números pequeños, se trataba de estilizaciones de las muescas (como las que se hacen en maderas) o de las rayas. Representar números mayores ya era algo más complicado. Y todavía se hizo más difícil la puesta a punto de mecanismos para la segunda gran conveniencia de un sistema de numeración: la realización de operaciones aritméticas, de cálculos.

Para llegar a tener disponible el actual sistema de numeración han sido necesarios 3 500 años desde aquella primera aparición de las cifras que hemos evo-

1. *Las cifras. Historia de una invención*. Madrid. Alianza Editorial, 1987. Es un libro muy interesante que trata de forma monográfica sobre las cifras y los sistemas de numeración. Lo hemos utilizado en más ocasiones a lo largo de este capítulo.

cado. Es una etapa muy larga, y que, por consiguiente, indica que hubo una gran cantidad de dificultades conceptuales que resolver. Y también revela que su aprendizaje por parte de niños y adolescentes (a pesar de lo que prácticamente se suele pensar en la escuela, dado el poco tiempo que se dedica al tema) será lento, parcial y complicado².

Veamos las etapas recorridas. Si queremos representar cantidades grandes, ya no nos sirven los palitos o las muescas, porque enseguida hay una gran cantidad, que nos lleva a volver a contar una y otra vez. Se necesitan símbolos para representar cantidades más grandes (para fijar ideas, pensemos en un sistema menos evolucionado que todavía perdura, como uno de los restos de una civilización que dominó nuestro mundo y que ha dejado rastros duraderos: el de los números romanos, en el cual el signo V equivale a cinco rayas y el signo L a cincuenta), y que representaban siempre la misma cantidad. Decimos que las cifras, los símbolos así utilizados, tienen un *valor absoluto*: esté donde esté una L siempre quiere decir cincuenta. Fue una idea rentable, pero no suficiente. Sobre todo si se quiere calcular con los números así escritos, incluso con números no muy grandes. Basta hacer la prueba con números escritos en el sistema romano, incluso para sumar números como CDXXIV y CCXXXIX. No hablamos de lo que supone multiplicar esas cantidades: no hay unos algoritmos (procedimientos operativos) sencillos y mecánicos que nos permitan obtener el resultado.

Así pues, mediante ese procedimiento (utilizado por diversas culturas en todo el planeta), se pueden representar cantidades, pero no es útil para operar con sencillez. Y además da lugar a una gran cantidad de símbolos y a representaciones compuestas por muchos símbolos, muy largas, en cuanto el número es un poco alto. Por ejemplo, los dos números expresados en numeración romana a los que nos hemos referido en el párrafo anterior, 424 y 239, tienen 6 y 7 letras, y en cambio sólo 3 cifras en nuestro sistema.

Pero existe otra idea más rentable, y que sirve para representar números por grandes que sean. Es lo que se llama el principio del *valor relativo*: una misma cifra, un mismo símbolo, tendrá un valor diferente en relación (de ahí lo de relativo) con el lugar en que esté colocado. Por fijar las ideas, en el 424 anterior hay dos símbolos iguales: 4. Pero el de la derecha representa cuatro y el de la izquierda 400.

2. Como comenta el psicólogo y pedagogo Bruno Bettelheim, «aprendí a ser paciente con mis alumnos y mis pacientes cuando les costaba mucho tiempo comprender o cambiar cosas que yo mismo había tardado muchos años en asimilar» (*El peso de una vida*. Barcelona. Crítica. 1991). En la enseñanza sería bueno adoptar la misma actitud con conceptos o procedimientos que ha sido muy trabajoso poner a punto, que han aparecido tarde en la historia de la humanidad, porque eso indica que son complicados de aprender. Y por consiguiente, su adquisición por los estudiantes estará llena de dificultades.

En el caso de nuestro sistema de numeración, si escogemos varios números: 1, 15, 143 y 1 786, podemos observar que en todos ellos aparece el 1. Pero el significado de cada 1 es diferente. En el primero, es una unidad; en el segundo, una decena, que son 10 unidades; en el tercero, es una centena, que son 10 decenas; y por fin, en 1 786, el 1 es un millar, que son 10 centenas. En resumen, tenemos que:

1 decena = 10 unidades

1 centena = 10 decenas = $10(10 \text{ unidades}) = 10^2 \text{ unidades}$

1 millar = 10 centenas = $10(10^2 \text{ unidades}) = 10^3 \text{ unidades}$

Este proceso se puede aplicar a cualquier otro número. Si queremos saber qué representa cada una de las cifras del número 259 861, basta con mirar el lugar que ocupan, empezando por la derecha³. El 9 está en el cuarto lugar; su valor será $9 \cdot 10^3$, donde el exponente 3 del 10 es uno menos que el lugar que ocupa el 9. El 2, colocado en el sexto lugar empezando por la derecha, significa $2 \cdot 10^5$. Y así con todos los demás números.

Por consiguiente, cada lugar representa una potencia de 10, en nuestro caso. A ese número (se puede elegir otro, y ha habido culturas que lo han hecho) se le llama *base del sistema de numeración*. Es decir, que nuestro sistema de numeración es de base 10. Por tanto, para definir un sistema de numeración se necesita el principio del valor relativo y una base, que es el número de veces mayor que es cada orden de unidades que el anterior.

Pero queda un problema aparentemente pequeño: ¿qué hacer cuando en un determinado orden de unidades (centenas o millares, por ejemplo) no tenemos ninguna? Entonces ponemos el cero. Desde nuestra perspectiva, es un “invento” obvio, pero sólo llegó a idearlo una cultura a lo largo de la historia, y supuso el broche de oro de los sistemas de numeración. Algo aparentemente tan banal (y por ese convencimiento se dedica muy poco tiempo a enseñarlo, por no decir ninguno) como el cero supone la unión de dos conceptos aparentemente distintos y lejanos: la ausencia y la nulidad. Una cifra igual que las demás en cuanto a su operatividad y propiedades, pero que, al contrario que las otras, no representa la existencia sino la ausencia.

Pensemos por un momento qué es lo que pasa si no tenemos una cifra (y un lugar mental) para representar la ausencia de un determinado orden de unidades.

3. Como veremos más adelante, el sistema de numeración decimal llegó a Europa a través de los árabes, que escriben, como se sabe, de derecha a izquierda, en sentido inverso que nosotros. Y junto con él, nos han legado su manera de escribir los números, que empezamos, como ellos, por la derecha. Por eso para ver el orden de las unidades hay que empezar por el número de la derecha.

des. Tendremos que dejar un vacío, un hueco en el lugar correspondiente. Eso daría lugar a todo tipo de inseguridades, sobre todo si se copia la cantidad, porque nunca habría la seguridad del orden de unidades que se está utilizando. Ese problema se solventa con la utilización del cero.

Gracias a todo este aparato conceptual ya podemos representar con facilidad y comodidad, y sin riesgo de ambigüedades, cualquier número. Y para ello necesitamos tantos símbolos (incluido el cero) como indique la base: en nuestro caso 10 signos diferentes. Y cualquier número es una suma de potencias de diez multiplicadas por números menores que 10; suma en la que quizás falte alguna de las potencias de 10 (siempre que aparezca un cero). Por ejemplo, cuando escribimos 4 807, lo que queremos expresar es:

$$7 + 0 \cdot 10 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3$$

o bien, si queremos hacer más sencilla la suma:

$$7 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3$$

La descomposición de un número cualquiera en una expresión como la anterior ayuda a comprender mejor los mecanismos de las operaciones habituales y a desentrañar algunas situaciones más o menos “mágicas” o aparentemente sorprendentes. Como invitación proponemos los problemas siguientes, con los cuales se puede jugar a hacer adivinaciones, con la seguridad de acertar siempre.

Problema 1

Elige un número cualquiera de tres cifras. Invierte ahora el orden de las cifras. Ahora tendrás dos números; del mayor de los dos resta el menor. Al resultado obtenido le tienes que sumar el mismo resultado con las cifras invertidas. ¿Cuál es el resultado? Puedes apostar con cualquiera: seguro que el resultado que obtienes es 1 089.

Vamos a poner dos ejemplos. Si el número elegido es 224; invertimos las cifras y se obtiene 422. Restamos $422 - 224 = 198$. Invertimos 198 y tenemos 891. Sumando $891 + 198 = 1\,089$

Otro caso: 796. El proceso es: $796 - 697 = 099$; $099 + 990 = 1\,089$. El resultado siempre es el mismo. Queremos que busques por qué razón el resultado es siempre 1 089.

Problema 2

Escoge un número de tres cifras, el que más te guste, y escríbelo dos veces seguidas para tener un número de seis cifras (por ejemplo, si has elegido el 475, te quedará 475 475). Divídelo por 7: verás que da exacto. Divide el cociente por 11: vuelve a ser exacto. Y el segundo cociente divídelo otra vez, ahora por 13. ¡Sorpresa! No solamente

vuelve a ser exacto, sino que el cociente final es el número de tres cifras del que has partido.

Puedes comprobar que pasa siempre lo mismo, sea cual sea el número elegido. Se trata de que encuentres las razones por las que eso sucede.

Tenemos así ya completo el sistema de numeración con el principio del valor relativo, una base (diez en nuestro caso, de ahí el nombre de decimal) y el cero. Solamente una civilización humana ha llegado a construir este sistema en toda la historia: la hindú. La primera aparición completa y fechada del mismo se remonta a una obra de un matemático de la actual India en el año 628, 3 500 años después de la aparición de las primeras cifras de que dábamos cuenta al inicio de este apartado, y hace menos de 1 500 años. Desde entonces este sistema se ha extendido a todo el mundo, constituyendo el único sistema universal de representación.

En esos 3 500 años existieron otros métodos de representación, algunos de los cuales todavía persisten. La generalización del sistema hindú no fue fácil ni lineal. De todo ello nos ocuparemos más adelante. Pero antes de hacerlo, queremos insistir otra vez en que algo que cuesta 3 500 años es sumamente complicado de poner a punto, y que, por consiguiente, tiene dificultades conceptuales importantes. Por ello hay que tener gran cuidado en su enseñanza y no darlo como algo evidente. Ni tampoco pensar que una vez que se ha empezado a trabajar con él ya está definitivamente adquirido y no habrá mayores dificultades.

Otros sistemas de numeración

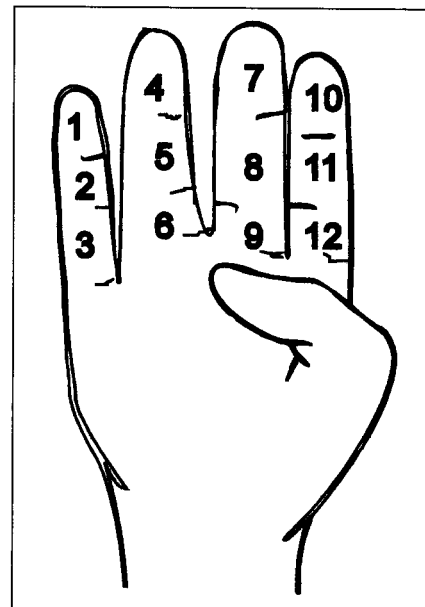
Nos hemos referido hasta ahora a nuestro sistema de numeración, de base 10. Y la razón de que se haya elegido esa base salta a la vista sólo con mirarse las manos: tenemos diez dedos (y por eso a los números menores de 10 se les llama dígitos). Y es que la mano es la primera calculadora de la historia, cuya utilidad persiste, a pesar de los avances de las modernas calculadoras electrónicas; y bueno será recordarlo para no poner limitaciones a su uso (incluso en niveles que parecen ya muy adelantados: si alguien cuenta con los dedos es señal de que lo necesita. Dejará de hacerlo cuando tenga instrumentos o procedimientos más rentables; poco se adelanta con la prohibición, salvo el forzar a que se haga a escondidas, como no es infrecuente observar en las aulas).

En la historia humana se han utilizado otras bases para los sistemas de numeración, junto con el principio del valor relativo (sólo el cero es exclusivo del sistema hindú, hoy adoptado en todos los países, como hemos dicho antes). Esas bases han sido tres: el 12, el 20 y el 60. Parecen a primera vista elecciones un tanto absurdas, pero hay razones subyacentes que las explican.

Vayamos por orden. Contar en base 12 es hacer agrupaciones de doce elementos, con lo cual la primera unidad es la docena (equivalente a la decena en nuestro sistema), y la siguiente son doce docenas, es decir 144 unidades ($144 = 12 \times 12$), que es lo que se llama una gruesa, y que aún se utiliza para contar algunos productos, como los huevos, las pinzas de tender la ropa o las ostras. Así pues, el sistema de base 12, cuyo origen hay que buscarlo en la tierra en que se empezaron las representaciones numéricas, todavía persiste, aunque sea de forma larvada, en la actualidad. Pero, ¿por qué se hizo la elección de la base 12?

Tenemos que volver nuevamente a las manos y recordar que el ser humano es el único primate cuyo pulgar se puede oponer a todos los dedos (los otros primates tienen un pulgar prensil). Por ello con el pulgar se pueden ir contando, en una sola mano, teniendo en cuenta que cada uno de los otros dedos tiene 3 falanges, hasta 12 divisiones distintas. Es decir, ¡que la base 12 también la tenemos a mano! Eso sí, de una manera un poco menos evidente que la base 10, que es el número de dedos (véase Figura 1).

Figura 1



Hablando de dedos, podemos extender un poco el punto de mira, y tomar en consideración también los de los pies (algo más sencillo si se vive en zonas no muy frías que permitan ir siempre con los pies al descubierto). Así obtenemos la explicación de la base 20, que fue la que utilizaron, por ejemplo, los mayas de la actual Centroamérica en la civilización anterior a la llegada de los españoles. Los diferentes órdenes de unidades (para los que tenían símbolos oportunos) eran 20, 400 y 8 000, que son respectivamente el cuadrado y el cubo de 20. La base 20 ha sido utilizada en diferentes civilizaciones africanas y asiáticas, así como en la cultura esquimal de Groenlandia. Y, aunque son ligeros, quedan restos en la forma de contar en algunos países europeos, por ejemplo en francés, 80 aún se dice cuatro-veinte ("quatre-vingt"), y en el francés antiguo la solución era la misma para 60, 120 o 140 (que eran "trois-vingt", "six-vingt" o "sept-vingts", respectivamente tres, seis o siete veintes).

Nos queda por explicar el origen de la base 60, utilizada por los antiguos babilonios, y transmitida por los antiguos astrónomos, y de la que tenemos todavía restos en nuestra cultura en la forma de medir el tiempo (una hora son sesenta minutos, cada uno de los cuales tiene a su vez sesenta segundos; y también en la

medida de ángulos, con las mismas equivalencias). No hay ninguna prueba concluyente de las razones de esa elección, pero la hipótesis más probable es que utilizando las dos manos se puede llegar a contar 60. En efecto, hemos visto antes que con una mano llegamos a 12, y llevando la cuenta con la otra mano, con cada uno de los cinco dedos, se puede llegar como máximo a 60 ($60 = 12 \cdot 5$).

Mucho menos extendida ha sido la utilización de la base 5, que resulta de usar una sola mano en vez de las dos, aunque también hubo algunos pueblos de Oceanía que la emplearon.

Problema 3

Ya que estamos con divisiones del grado, queremos que reflexiones un poco por qué se toma esa unidad de medida de ángulos, que sabes que es el resultado de dividir una vuelta completa (toda una circunferencia) en 360 partes iguales. ¿Por qué se ha elegido el número 360 y no cualquier otro?

Otro poco de historia

Hemos visto que el sistema decimal permite escribir los números con facilidad y operar con rapidez, por lo que es muy superior a cualquier otro sistema de numeración utilizado anteriormente, y que estaba desarrollado hace unos 1 500 años. Sin embargo su introducción en Occidente no fue rápida ni sencilla. El primer libro occidental que trata de este sistema data de 1202, de los tiempos de Marco Polo y de las Cruzadas, se titula *Liber abaci* (o Libro del ábaco), y lo escribió un comerciante y matemático italiano llamado Leonardo Fibonacci, que tenía relaciones comerciales con los árabes, de los que aprendió el sistema. Porque fueron los árabes quienes hicieron de transmisores de lo que se conoce como “numeración árabe”, aunque, como hemos visto, debería llamarse india o hindú⁴.

4. Esa cooperación en la transmisión del sistema de numeración ha hecho que muchas de las palabras que se utilizan sean de origen árabe. Por ejemplo, la palabra árabe “sifr”, que quiere decir vacío (que es el papel que juega el cero), ha dado lugar a cero y también a cifra; o algoritmo, procedimiento de cálculo, que viene del nombre del sabio al-Khuwarizmi, que fue el encargado por el sultán de difundir la numeración india. Para más datos se puede ver *La matemática de Pitágoras a Newton*, de L.L. Radice. Barcelona. Laia, 1983. Los matemáticos árabes desarrollaron, además muchas partes de las matemáticas y nos legaron costumbres que aún perduran. Por ejemplo, el llamar x a la incógnita en las ecuaciones tiene el siguiente origen, según relata A. Maalouf en su novela *Samarcanda* (Madrid. Alianza Editorial, 1989): «Durante los meses siguientes comienza la redacción de un libro muy importante consagrado a las ecuaciones cúbicas. Para representar la incógnita, en ese tratado de álgebra, Jayyam utiliza el término árabe “shay”, que significa cosa; esta palabra, escrita “xay” en las obras científicas españolas, ha sido reemplazada progresivamente por su primera letra, x , que se ha convertido en el símbolo universal de la incógnita».

Pero la aceptación definitiva no se alcanza con plenitud hasta pasada la Revolución francesa, hace unos 200 años. Pues, si bien a lo largo del siglo xv se fue implantando progresivamente, subsistieron inconvenientes que hicieron que, a finales del siglo xvi, Montaigne, uno de los hombres más cultos de su tiempo, se quejara de que no sabía calcular. Los dos obstáculos fundamentales que retrasaron la entrada en Europa del sistema decimal de numeración fueron los calculadores profesionales y la resistencia de los poderes constituidos.

La dificultad de la realización de cálculos con los métodos utilizados hasta el Renacimiento en Europa, hizo necesaria la existencia de un gremio de calculistas profesionales, que aplicaban complicadas técnicas sólo conocidas por ellos. Con la introducción de métodos más sencillos, accesibles para mucha gente, su utilidad pasaba a ser dudosa y corrían el riesgo de desaparecer como oficio, de pasar al paro o a la reconversión, según la terminología laboral actual. Como todo gremio en esas circunstancias, opusieron una fuerte resistencia y desplegaron toda su influencia (que no era poca, puesto que las haciendas estaban en sus manos), para oponerse a la numeración decimal.

Para colocarnos en una situación similar, haciendo un ejercicio de ciencia ficción, imaginemos la reacción de la clase médica ante la aparición de ordenadores que por un precio asequible diagnosticaran con fiabilidad las enfermedades y prescribieran los remedios adecuados. O, en el mismo terreno de ficción, qué harían los actuales técnicos informáticos si se lanzara al mercado, al mismo precio de los actuales, un ordenador que ejecutara órdenes habladas en el lenguaje habitual.

En cuanto a la reacción de los poderes constituidos, estuvieron encabezadas por la Iglesia Católica (aunque había otras iglesias), que desde el Renacimiento pusieron en cuarentena a la ciencia y a la filosofía (otra de cuyas manifestaciones fueron las polémicas y las dificultades de todos los pensadores que proponían nuevas teorías astronómicas). Hay que pensar que si bien el camino físico recorrido por los nuevos sistemas de numeración empieza, como hemos visto, en la India, quienes actúan como transmisores son los árabes, es decir, infieles. «Ciertas autoridades eclesiásticas hicieron correr el rumor de que, al ser tan fácil, tan ingenioso, el cálculo de los árabes debía de tener algo mágico, incluso algo demoníaco: sólo podía proceder del mismo Satanás en persona», como señala G. Ifrah.

Una vez situados en ese universo mental, no estaba lejano el momento de colocar a los calculistas “modernos” al lado de filósofos heterodoxos y de brujos de todo tipo, al calor de la hoguera inquisitorial. Y así sucedió en no pocos lugares, con la consiguiente prevención para los demás. De esta manera se desarrolla durante siglos una guerra al menos tan importante como las que suelen aparecer en los libros de historia, y sin embargo muy poco conocida: la guerra entre los abaquistas, aferrados al cálculo con los viejos instrumentos, y los algoritmistas,

que estaban a favor de la numeración árabe. Una mirada a nuestro alrededor nos dice quiénes fueron los ganadores de esa guerra.

Pero la guerra a la que hacemos referencia no aniquiló a los vencidos, a los otros sistemas de numeración. Los derrotó, pero, como hemos visto, desde los albores de los tiempos siguen persistiendo algunos residuos de otros sistemas de numeración. Y si no, ¿por qué los huevos se siguen contando por docenas?, ¿por qué una hora tiene 60 minutos y cada minuto se subdivide en 60 segundos? Y los siglos se siguen escribiendo en números romanos: estamos acabando el siglo XX, no el 20. Y veremos a continuación que después se han puesto en funcionamiento otros sistemas de numeración, con los mismos principios que el hindú, pero con otras bases.

La mejor base

En cuestión de números, como en casi todo, las cosas son buenas o malas según el uso que se quiera hacer de ellas. Si la base es pequeña, por ejemplo 5, tenemos la ventaja de que sólo necesitamos 5 cifras distintas. Pero un número escrito en el sistema de base 5 es más largo que si lo escribimos en base 10. Si la base es mayor que 10, los números son más cortos, pero necesitamos más de 10 cifras distintas, como veremos ahora con algunos ejemplos. O sea, que dependiendo de lo que nos interese, será mejor una elección u otra.

Vamos a aclarar lo de las bases y los números escritos en los distintos sistemas. Y conviene insistir en que se trata del mismo número, aunque su representación física sea distinta. Así, XX y 20 es el mismo número, expresado de dos maneras distintas. Para indicar en qué sistema estamos escribiendo pondremos debajo del número, como subíndice, la base en que está escrito. Así 123_5 quiere decir que ese número está escrito en base 5. ¿A qué número escrito en el sistema habitual, el de base 10, corresponde? O dicho de otra forma, ¿cómo se escribe en base 10? Según el principio del valor relativo que hemos visto más arriba será:

$$123_5 = 3 + 2 * 5 + 1 * 5^2 = 3 + 10_{10} + 25_{10} = 38_{10}.$$

Otro ejemplo, ahora en base 3. ¿Qué número representa el 121023? (hay que destacar que ahora sólo disponemos de las cifras 0, 1 y 2). Igual que antes,

$$12102_3 = 2 + 0 * 3 + 1 * 3^2 + 2 * 3^3 + 1 * 3^4 = 2 + 9 + 54_{10} + 81_{10} = 146_{10}.$$

Ya hemos comprobado que si la base es más pequeña la representación del número tiene más cifras, es más largo.

Problema 4

Para practicar un poco, halla los equivalentes decimales (es decir en base 10) de los números siguientes: $1\ 354_6$; $4\ 634_7$; $3\ 532_4$; $1\ 010\ 011_2$ y $56\ 370_8$.

El cambio inverso es un poco más complicado, es decir, hallar la representación en otro sistema de un número escrito en el sistema decimal (de base 10). Si tenemos el número 359_{10} y lo queremos representar en base 8, tenemos que encontrar unas cifras, que no sabemos cuáles son –pero que, eso sí, serán menores que 8–, y que llamamos, por ejemplo, a, b, c y d, tales que:

$$d + c * 8 + b * 8^2 + a * 8^3 = 359$$

Si vamos buscando a ojo encontraremos que es necesario que $d = 7$, $c = 4$, $b = 5$, $a = 0$. Es decir, que $359_{10} = 547_8$. Pero, como no conviene confiar en la inspiración de cada momento, es mejor utilizar un procedimiento mecánico para obtener esos valores (que es lo que se llama un algoritmo, al que nos hemos referido más arriba. Seguro que conoces varios: el de sumar, el de multiplicar, el de cambiar las marchas de la bicicleta, el de poner a grabar el video...). Pero todos los algoritmos son así por alguna razón; la del que vamos a exponer a continuación la tendrás que buscar tú mismo.

Divide 359 (número que quieres cambiar de base) entre 8 (base a la cual quieres cambiar). El cociente es 44 y el resto 7: este resto será la primera cifra de la derecha. Volvemos a dividir 44 por 8; el cociente es 5 y el resto es 4: ya tenemos la segunda cifra. La tercera y última es el 5: hemos acabado porque el cociente ya es menor que la base. El último cociente es la última cifra. Y tenemos que $359_{10} = 547_8$.

Otro ejemplo. Cambiar 834_{10} a base 7. Vamos dividiendo. Obtenemos: $834 = 119 * 7 + 1$. Continuamos: $119 = 17 * 7 + 0$. Otra vez: $17 = 7 * 2 + 3$. Luego vamos poniendo de derecha a izquierda todos los restos y al final el último cociente. Así $834_{10} = 2\ 301_7$. Todas estas divisiones se puede disponer, para hacerlo más fácil, de la siguiente manera:

834		7		
13		119		7
64		49		17
①		①		③
				②

Problema 5

Para que puedas practicar, expresa cada uno de los números siguientes, que están escritos en base 10, en la base que se indica: 367 en base 5; 2 061 en base 7; 3 407 en base 2; 234 en base 4 y 131 en base 12.

Si has resuelto los dos problemas anteriores, habrás comprobado por ti mismo lo que ya te habíamos dicho: cuanto menor es la base, menor número de cifras distintas nos hacen falta, pero más larga es la representación. Y viceversa. Ahora podrás contestar a la pregunta de cuál es la mejor base: ¡Depende de para qué la queramos!

El caso extremo es la base 2, la menor que podemos elegir. En ese sistema sólo hay ceros y unos; aunque en cuanto el número es un poco grande se convierte en un auténtico rosario de esas dos cifras, larguísimo. Sin embargo, podremos ver que es de gran utilidad. Antes de hablar de ello aún tenemos que ver cómo se opera en esos otros sistemas, que también tiene su intrínquis. Y, además, operando en otros sistemas no tendremos más remedio que pensar de verdad en por qué hacemos las cosas como las hacemos. A lo mejor conseguimos enterarnos finalmente de por qué se suma y se multiplica de esa manera (todo eso del llevar y demás). Es decir, entendemos un poco mejor por qué cada algoritmo es como es.

Imaginemos que vemos en un papel dos operaciones como las siguientes:

$$\begin{array}{r} 33\ 214 \\ +\ 23\ 103 \\ \hline 111\ 322 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 342 \\ * 13 \\ \hline 10\ 131 \\ 1\ 342 \\ \hline 24\ 101 \end{array}$$

Lo más fácil es que pensemos que quien las haya hecho no anda muy fuerte en cálculos. O que son operaciones que no conocemos aunque se representen de la misma manera. Y sin embargo, son operaciones que están bien hechas y son la suma y la multiplicación habituales, eso sí, con una pequeña diferencia: están realizadas en el sistema de numeración de base 5. Ya hemos aprendido a hallar las equivalencias entre números escritos en distintas bases. Haciendo esos cambios, y poniendo todos los números en base 10, las operaciones que están representadas arriba son:

$$2\ 309 + 1\ 653 = 3\ 962 \text{ y } 222 * 8 = 1\ 776, \text{ y son correctas.}$$

Vamos a aprender a calcular en los distintos sistemas de numeración. Para poder hacer una operación hay que tener la tabla de la misma, donde aparece el resultado de operar dos números de una cifra. Vamos a poner las correspondientes a la suma y a la multiplicación en el sistema de base 6, y las utilizaremos a continuación. Si tienes alguna dificultad, pasa todos los números a base 10 y verás cómo todo funciona bien.

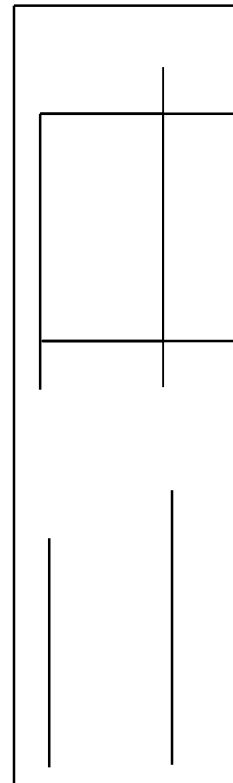


TABLA DE SUMAR EN BASE 6

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	10
2	2	3	4	5	10	11
3	3	4	5	10	11	12
4	4	5	10	11	12	13
5	5	10	11	12	13	14

TABLA DE MULTIPLICAR EN BASE 6

*	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	10	12	14
3	3	10	13	20	23
4	4	12	20	24	32
5	5	14	23	32	41

Con la ayuda de las tablas, vamos a realizar algunas operaciones en el sistema de base 6. En primer lugar, una suma, en la que indicamos debajo de cada columna la cantidad que “nos llevamos”:

$$\begin{array}{r}
 125 \\
 + 451 \\
 \hline
 3214 \\
 4234 \\
 111
 \end{array}$$

Aunque seguramente no es necesario, se puede comprobar la operación pasando los sumandos y el resultado a base 10: $53 + 175 + 730 = 958$.

Ahora una multiplicación:

$$\begin{array}{r}
 125 \\
 * 32 \\
 \hline
 254 \\
 423 \\
 \hline
 4524
 \end{array}$$

(En base 10 será: $53 * 20 = 1\ 060$. Se puede practicar con otros números y comprobar pasando los términos a base 10).

También se pueden hacer las tablas de suma y multiplicación en base 5 y comprobar que efectivamente las operaciones con las que comienza este párrafo están bien hechas, así como que es correcta la siguiente operación:

$$\begin{array}{r}
 2341 \\
 * \quad 203 \\
 \hline
 131323 \\
 10232 \\
 \hline
 1210023
 \end{array}
 \quad (\text{Base } 5)$$

Problema 6

Ahora que ya hemos manejado diferentes bases, se trata de descubrir en qué base está realizada esta multiplicación.

$$\begin{array}{r}
 413 \\
 * \quad 34 \\
 \hline
 2255 \\
 1542 \\
 \hline
 21005
 \end{array}$$

En la base 2 (el llamado sistema binario), las tablas son especialmente sencillas, y de fácil construcción (que dejamos para el lector). Su principal inconveniente es que los números son muy largos. Así el número 165 en base 2 se escribe 10100101. ¡Hay diferencias de longitud!

Después de todo esto puedes pensar que es divertido o aburrido, interesante o no. Pero seguramente te queda el convencimiento de que tiene poca utilidad digamos práctica. Y eso que existe un consenso social sobre que las matemáticas son muy útiles. ¡Hay que pensar también que algo que sirva para hacer pasar ratos agradables a la gente es sumamente útil! Pero es que además lo de los sistemas de numeración se aplica en muchos aspectos de la vida cada día: sin ir más lejos tiene una aplicación directa en la realización de este libro. ¿No te lo crees? Pues es verdad, puesto que ha sido escrito con un ordenador y compuesto, antes de imprimirlo, con otro. ¡Y los ordenadores actúan y “piensan” en base 2! Lo vamos a ver ahora mismo.

El mejor sistema de numeración para los ordenadores

Imaginemos un circuito eléctrico con un interruptor. Al abrirlo y cerrarlo, tenemos dos situaciones, dos estados diferentes en el circuito. Necesitamos dos

símbolos para representarlos. Podemos convenir en que si el circuito está abierto (no pasa corriente), le corresponde 0; mientras que si el circuito está cerrado (y deja pasar corriente), le corresponde 1. De esta manera, abriendo y cerrando el circuito haremos una secuencia de ceros y unos con los que podemos representar cualquier número, siempre que esté escrito en base 2.

De forma similar podemos asignar un número para cada letra o para cada símbolo de escritura y tendremos un sistema de representación de números, letras y símbolos mediante secuencias de unos y ceros. Así es, de forma muy elemental, la manera en que un ordenador puede recibir o proporcionar información. Es decir, que un ordenador utiliza el sistema binario, tanto para recibir información, como para procesarla o para transmitirla. ¿Se podría trabajar eléctricamente en algún otro sistema de numeración? La respuesta es no, y la razón es simple: tan sólo hay dos posibilidades, que pase o que no pase corriente. Por otra parte la electricidad nos ofrece el método más rápido para realizar cambios. Estos dos hechos han producido ordenadores que funcionan con electricidad y que trabajan con el sistema binario.

De todos modos hay que colocar a los ordenadores en el lugar que les corresponde, señalando que lo que saben hacer es sumar en base dos (que si has hecho la correspondiente tabla verás que resulta muy sencillo), y comparar dos números en base dos, para ver cuál es mayor. Eso sí, lo hacen con una endiablada rapidez, de manera que aunque tengan que hacerlo todo a base de sumas y comparaciones, terminan siendo mucho más veloces que el mejor calculista.

Para hacernos una idea de la rapidez de los ordenadores, pensemos en el proceso de predicción del tiempo. Se utilizan ordenadores diseñados especialmente para esta tarea. Uno de los primeros superordenadores, el CRAY I, era capaz de realizar 50 millones de operaciones por segundo. (Hay que aclarar, que una operación de ordenador se reduce a trabajar con números de una sola cifra). Pues bien, un ordenador como el CRAY I tarda unas tres horas para hacer una predicción del tiempo con diez días de antelación. Y en este trabajo realiza unos quinientos cuarenta mil millones de operaciones, en números 540 000 000 000, o en notación científica $54 \cdot 10^{10}$. Y a pesar de todo no siempre aciertan la predicción del tiempo, aunque no es por culpa de los defectos en las operaciones.

Pero además los ordenadores aumentan su velocidad de cálculo con extraordinaria rapidez. Para darnos una idea, basta pensar que utilizando los ordenadores más potentes de los años 50, se emplearían ¡cuatro meses! en hacer los cálculos que el CRAY I realiza en tres horas (y que hay algunas generaciones posteriores de CRAY en funcionamiento). Todos estos datos son ya viejos, pero la velocidad de avance de la rapidez de cálculo en las nuevas generaciones de ordenadores es tal, que aunque aportáramos los de los últimos ordenadores, en pocos años se quedarían pasados de moda. Sirvan pues esos datos para hacerse una idea de la fantástica velocidad a la que se desenvuelven los ordenadores... en base dos.